Bull. Sci. math. 124, 5 (2000) 365–384
© 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés

ESTIMATIONS DU NOYAU DE LA CHALEUR SUR LES VARIÉTÉS CONIQUES ET SES APPLICATIONS

PAR

HONG-QUAN LI [1]
Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

Manuscrit présenté par Thierry AUBIN, reçu en Mars 1999

RÉSUMÉ. – Le but de cet article est de donner des estimations du noyau de la chaleur ainsi que de son gradient sur les variétés coniques, $C(N)=\mathbb{R}^+\times N$, où N est une variété riemannienne compacte, connexe et de dimension $n-1\geqslant 2$. A partir de ces estimations, on étudie d'une part des multiplicateurs sur les variétés coniques à base compacte et on établit des résultats analogues à (Alexopoulos, 1994) ; d'autre part, on étudie la transformation de Riesz sur les variétés coniques $C(C(N))=\mathbb{R}^+\times C(N)$ où N est une variété riemannienne compacte sans bord, connexe et de dimension $n-1\geqslant 2$.
© 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et énoncé des résultats

Si N est une variété riemannienne de dimension $n-1$, connexe, avec un bord ∂N (on admet $\partial N=\emptyset$), le cône sur N, $C(N)$, est l'espace $\mathbb{R}^+\times N$ muni de la métrique riemannienne $dr^2+r^2g_N$, où g_N est la métrique riemannienne sur N. Si $\partial N\neq\emptyset$, on ajoute la condition de Dirichlet pour les laplaciens sur N et $C(N)$. Dans cet article, on suppose toujours que N est compacte.

On note d_N (resp. d) la distance riemannienne induite sur N (resp. $C(N)$), $d\mu_N$ (resp. $d\mu$) la mesure riemannienne induite sur N (resp. $C(N)$), $\triangle_N$ (resp. $\triangle$) le laplacien sur N (resp. $C(N)$), ∇_N (resp. ∇) l'opérateur de gradient sur N (resp. $C(N)$) et p_t ($t>0$) le noyau de la

[1] E-mail: Hong-Quan.Li-HQ@math.u-psud.fr. Adresse actuelle : Institut de Mathématiques, Bâtiment de Chimie, Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne.

chaleur (de Dirichlet) sur $C(N)$. Pour $r > 0$ et $m \in N$ (resp. $(s, m) \in C(N)$), on note $B_N(m, r)$ (resp. $B((s, m), r)$) la boule géodésique de centre m (resp. (s, m)) et de rayon r. Dans la suite, on note $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres de $-\triangle_N$ rangées dans l'ordre croissant chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité. A chaque valeur propre λ_j est associée une fonction propre ϕ_j normalisée de telle sorte que la suite $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(N)$. On pose $\nu_j = \sqrt{((n-2)/2)^2 + \lambda_j}$. En particulier, si $\lambda_2^* > \lambda_1$ désigne la deuxième valeur propre non nulle, on pose $\nu_2^* = \sqrt{((n-2)/2)^2 + \lambda_2^*}$. On note de plus $\varphi(m, m_*) = \sum_{\lambda_j = \lambda_1} \phi_j(m)\phi_j(m_*)$.

Dans un premier temps, on va établir une estimation supérieure du noyau de la chaleur sur les variétés coniques à base compacte :

THÉORÈME 1.1. – *Si $n \geqslant 3$, pour $0 < C_2 < 1/4$ fixé, il existe une constante $C_1 > 0$ (qui dépend des propriétés de N) telle que pour tout $t > 0$, on a* :

$$\left[t\left|\frac{\partial p_t}{\partial t}\right| + p_t\right]\big((s, m), (s_*, m_*)\big) \leqslant C_1 t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-C_2 \frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}}, \quad \forall (s, m), (s_*, m_*) \in C(N).$$

Si $\partial N = \emptyset$, on donne des estimations de gradient de p_t comme suit :

THÉORÈME 1.2. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord et de dimension $n - 1 \geqslant 2$. Alors,*

(1) *si et seulement si $\lambda_1 \geqslant n - 1$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $0 < C_2 < 1/4$ telles que pour tout $t > 0$ et tous $(s, m), (s_*, m_*) \in C(N)$* :

$$\left|\nabla p_t\big((s, m), (s_*, m_*)\big)\right| \leqslant C_1 t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-C_2 \frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}}; \tag{1.1}$$

(2) *si et seulement si $\lambda_1 \geqslant 2n$ ou $\lambda_1 = n - 1$ mais $\lambda_2^* \geqslant 2n$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $0 < C_2 < 1/4$ telles que pour tout $t > 0$ et tous $(s, m), (s_*, m_*) \in C(N)$, on a* :

$$\left[\left|\frac{\partial^2 p_t}{\partial s^2}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\nabla_{N^{(m)}} p_t\right)\right|\right]\big((s, m), (s_*, m_*)\big) \leqslant C_1 t^{-\frac{n+2}{2}} \mathrm{e}^{-C_2 \frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}};$$

(3) *si et seulement si $\lambda_1 \geqslant 2n$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $0 < C_2 < 1/4$ telles que pour tout $t > 0$ et tous $(s, m), (s_*, m_*) \in C(N)$, on a* :

$$\begin{aligned}&\left[\left|\frac{1}{s}\nabla_N^{(m)}\left(\frac{\partial}{\partial s}p_t\right)\right|+\left|\frac{1}{s^2}\nabla^2_{N^{(m)}}p_t\right|\right]\bigl((s,m),(s_*,m_*)\bigr)\\&\quad\leqslant C_1t^{-\frac{n+2}{2}}\mathrm{e}^{-C_2\frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}};\end{aligned}$$

(4) *si* $h=\frac{t}{ss_*}\leqslant 1$, *il existe deux constantes* $C_1>0$ *et* $0<C_2<1/4$ *telles que* :

$$\begin{aligned}&\bigl|\nabla p_t\bigl((s,m),(s_*,m_*)\bigr)\bigr|\leqslant C_1t^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{-C_2\frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}},\\&\quad\forall (s,m),(s_*,m_*)\in C(N);\end{aligned}$$

quand $h=\frac{t}{ss_*}\geqslant 1$, *on a uniformément pour tout* $(m,m_*)\in N\times N$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s}\nabla_N^{(m)}p_t\bigl((s,m),(s_*,m_*)\bigr)\\&\quad=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}}\frac{1}{s}\frac{h^{\frac{n-2}{2}-\nu_1}}{\Gamma(\frac12+\nu_1)}\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{a}{h}}\bigl[a(1-a)\bigr]^{\nu_1-\frac12}\,da\\&\qquad\times\bigl(\nabla_N^{(m)}\varphi(m,m_*)+\mathrm{O}(h^{\nu_1-\nu_2^*})\bigr).\end{aligned}$$

(5) *Pour* $\varepsilon>0$ *fixé, il existe deux constantes* $C_1(\varepsilon)>0$ *et* $0<C_2<1/4$ *telles que pour tous* $s,s_*>\varepsilon$ *et tout* $(m,m_*)\in N\times N$, *on a* :

$$\begin{aligned}&\left\{|\nabla p_t|+t^{\frac12}\left[\left|\nabla^{(s,m)}\left(\frac{\partial}{\partial s}p_t\right)\right|+\left|\frac{1}{s^2}\nabla^2_{N^{(m)}}p_t\right|\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\nabla_N^{(m)}p_t\right)\right|\right]\right\}\bigl((s,m),(s_*,m_*)\bigr)\\&\quad\leqslant C_1(\varepsilon)\,t^{-\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}^{-C_2\frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}},\quad\forall 0<t\leqslant 1.\end{aligned}$$

Dans cet article, on donne aussi une estimation équivalente du volume d'une boule géodésique de $C(N)$:

PROPOSITION 1.3. – *Soit* N *une variété riemannienne compacte, connexe et de dimension* $n-1\geqslant 1$. *Alors, il existe une constante* $C>1$ (*qui dépend des propriétés de* N) *telle que* :

$$\begin{aligned}&C^{-1}r^n\leqslant\mu\bigl(B\bigl((s_*,m_*),r\bigr)\bigr)\leqslant Cr^n,\\&\quad\forall (s_*,m_*)\in C(N)=\mathbb{R}^+\times N,\ \forall r\geqslant 0.\end{aligned}$$

Par la Proposition 1.3, on peut établir l'inégalité de Sobolev sur les variétés coniques à base compacte :

COROLLAIRE 1.4. – *Si* $n > \alpha > 0$, *pour toute fonction convenable* f *définie sur* $C(N)$, *on définit* $S_\alpha f(X) = \int_{C(N)} d^{-\alpha}(X,Y) f(Y)\,d\mu(Y)$ *pour tout* $X \in C(N)$. *Alors, pour tous les* $1 < p < q < +\infty$ *qui satisfont* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n} - 1$, *il existe une constante* $A_{p,q} > 0$ *telle que* :

$$\|S_\alpha f\|_q \leqslant A_{p,q} \cdot \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p\big(C(N)\big).$$

De plus, d'après le premier résultat du Théorème 1.2 (voir (1.1)) et la Proposition 1.3, en remarquant que

$$\begin{aligned}&\nabla^{(s,m)}\nabla^{(s_*,m_*)} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\\ &\quad= \int\limits_{C(N)} \nabla^{(s,m)} p_{\frac{t}{2}}\big((s,m),y\big)\nabla^{(s_*,m_*)} p_{\frac{t}{2}}\big(y,(s_*,m_*)\big)\,d\mu(y),\end{aligned}$$

on déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5. – *Si* N *est une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord, de dimension* $n-1 \geqslant 2$ *avec la première valeur propre non nulle* $\lambda_1 \geqslant n-1$. *Alors, il existe deux constantes* $C_1 > 0$ *et* $0 < C_2 < 1/4$ *telles que pour tout* $t > 0$ *et tous* $(s,m), (s_*,m_*) \in C(N)$:

$$\big|\nabla^{(s,m)}\nabla^{(s_*,m_*)} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\big| \leqslant C_1 t^{-\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-C_2 \frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}}.$$

Cet article est organisé de la façon suivante : à la Section 2, on montre le Théorème 1.1. La preuve du Théorème 1.2 est donné dans la Section 3. A la Section 4, on donne des applications des deux théorèmes précédents ; en particulier, on étudie les estimations L^p des multiplicateurs sur les variétés coniques à base compacte et on obtient aussi des résultats partiels concernant la transformation de Riesz sur les variétés $C(C(N)) = \mathbb{R}^+ \times C(N)$ où N est une variété compacte, sans bord et de dimension $n-1 \geqslant 2$.

Dans toute la suite, C, C_*, C^*, etc. désigneront des constantes universelles qui dépendent peut-être des propriétés de N. Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre.

2. Preuve du Théorème 1.1

On se propose de montrer le Théorème 1.1 dans cette section. On commence par le lemme suivant :

LEMME 2.1. – *Il existe une constante $C > 0$, qui dépend des propriétés de N, telle que* :

$$\sum_j \nu_j^{-2n} \|\phi_j\|_\infty \big(\|\phi_j\|_\infty + \|\nabla_N \phi_j\|_\infty + \big\|\nabla_N^2 \phi_j\big\|_\infty\big) \leqslant C.$$

Preuve. – En effet, d'une part, d'après les résultats de [27] (p. 137) et la formule de Weyl (voir par exemple [29] p. 9), on en déduit qu'il existe une constante $C > 1$ telle que :

$$\|\phi_j\|_\infty^2 \leqslant C \cdot (1+\lambda_j)^{\frac{n-2}{2}} \leqslant C \cdot \big(1+\nu_j^2\big)^{\frac{n-2}{2}}, \tag{2.1}$$

$$C^{-1} j \leqslant \lambda_j^{\frac{n-1}{2}} \leqslant C\, j \Rightarrow \nu_j = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + \lambda_j} \sim (1+j)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.2}$$

D'autre part, en remarquant que $\phi_j(m) = \mathrm{e} \int_N p_{\lambda_j^{-1}}(m, m_*) \phi_j(m_*)\, d\mu_N(m_*)$ si $\lambda_j \neq 0$, on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\nabla_N \phi_j\|_\infty \leqslant \mathrm{e} \sup_{m\in N} \big\|\nabla_N p_{\lambda_j^{-1}}(m,\cdot)\big\|_{L^2(N)} \leqslant C \lambda_j^{\frac{n+1}{4}},$$

$$\big\|\nabla_N^2 \phi_j\big\|_\infty \leqslant \mathrm{e} \sup_{m\in N} \big\|\nabla_N^2 p_{\lambda_j^{-1}}(m,\cdot)\big\|_{L^2(N)} \leqslant C \lambda_j^{\frac{n+3}{4}}. \tag{2.3}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\sum_j \nu_j^{-2n} \|\phi_j\|_\infty \big(\|\phi_j\|_\infty + \|\nabla_N \phi_j\|_\infty + \big\|\nabla_N^2 \phi_j\big\|_\infty\big) \\
&\quad \leqslant C \sum_{j=0}^{+\infty} (1+j)^{-(n-12)/(n-1)} \leqslant C_*.
\end{aligned}$$

D'où le lemme. $\square$

On peut maintenant donner la preuve du Théorème 1.1 comme suit :

D'après le Théorème 3.1 et le Corollaire 3.3 de [13], pour prouver le Théorème 1.1, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$ et tout $(s, m) \in C(N)$, on a :

$$p_t\big((s,m),(s,m)\big) \leqslant C t^{-\frac{n}{2}}.$$

Or, d'après le résultat de [6] (p. 592), on a

$$
\begin{aligned}
&p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\\
&\quad = (ss_*)^{-\frac{n-2}{2}}\frac{1}{2t}\mathrm{e}^{-\frac{s^2+s_*^2}{4t}}\sum_{j=0}^{+\infty} I_{\nu_j}\left(\frac{ss_*}{2t}\right)\phi_j(m)\phi_j(m_*),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

où $I_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée. En particulier, quand $(s,m)=(s_*,m_*)$; si on note $\tau = t/s^2$, alors,

$$
\begin{aligned}
p_t\big((s,m),(s,m)\big) &= s^{-(n-2)}\frac{1}{2t}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2t}}\sum_{j=0}^{+\infty} I_{\nu_j}\left(\frac{s^2}{2t}\right)\phi_j^2(m)\\
&= s^{-n}\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\tau}}\sum_{j=0}^{+\infty} I_{\nu_j}\left(\frac{1}{2\tau}\right)\phi_j^2(m).
\end{aligned}
$$

Donc, pour montrer le Théorème 1.1, il nous reste à prouver qu'il existe une constante $C>0$ telle que :

$$
\left|\frac{1}{2\tau}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\tau}}\sum_{j=0}^{+\infty} I_{\nu_j}\left(\frac{1}{2\tau}\right)\phi_j^2(m)\right| \leqslant C\,\tau^{-\frac{n}{2}}, \quad \forall m\in N,\ \forall\tau>0.
$$

En effet, d'après le Lemme 2.1 et la preuve du Lemme 5.1 de [25] (p. 421), on obtient l'estimation précédente.

On prouve la Proposition 1.3 pour achever cette section :

Soient $(s_*,m_*)\in C(N)$, $r\geqslant 0$ fixés, on note $\Sigma=\{(s,m)\in C(N);\ |s-s_*|+\min(s,s_*)d_N(m,m_*)<r\}$. Dans la preuve du Lemme 3.1.2 de [17] (p. 154), on a montré qu'il existe une constante $C_*\geqslant 1$ telle que pour tout $(s_*,m_*)\in C(N)$ et tout $r>0$, on a :

$$
\begin{aligned}
C_*^{-1}\iint\limits_{\Sigma} h^{n-1}\,dh\,d\mu_N(m) &\leqslant \mu\big(B\big((s_*,m_*),r\big)\big)\\
&\leqslant C_*\iint\limits_{\Sigma} h^{n-1}\,dh\,d\mu_N(m),
\end{aligned}
$$

$$
\iint\limits_{\Sigma} h^{n-1}\,dh\,d\mu_N(m)\leqslant C_*\int_0^r \int\limits_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh.
$$

Donc, pour prouver la Proposition 1.3, il nous reste à montrer qu'il existe une constante $C_*\geqslant 1$ telle que :

$$C_*^{-1} r^n \leqslant \int_0^r \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh \leqslant C_*^{-1} r^n,$$
$$\forall (s_*, m_*) \in C(N),\ \forall r \geqslant 0.$$

En effet,

(1) Si $s_* \leqslant r$, d'après la compacité de N, on a d'une part,

$$\int_0^r \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh \leqslant \int_0^r \mu_N(N)(r+h)^{n-1}\,dh \leqslant C\,r^n;$$

d'autre part,

$$\int_0^r \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh \geqslant \int_0^{\frac{r}{2}} \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)h^{n-1}\,dh \geqslant C_* r^n.$$

(2) On suppose maintenant que $s_* > r$. D'après la compacité de N et $\dim N = n-1$, on a d'une part,

$$\int_0^r \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh \leqslant \mu_N\left(B_N\left(m_*, \frac{r}{s_*}\right)\right) r\,(2s_*)^{n-1} \leqslant C_*\left(\frac{r}{s_*}\right)^{n-1} r\,(2s_*)^{n-1};$$

d'autre part,

$$\int_0^r \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r-h}{s_*}} d\mu_N(m)(s_*+h)^{n-1}\,dh \geqslant s_*^{n-1} \int_0^{\frac{r}{2}} \int_{d_N(m,m_*)<\frac{r}{2s_*}} d\mu_N(m)\,dh \geqslant s_*^{n-1}\,\frac{r}{2}\,C^*\left(\frac{r}{2s_*}\right)^{n-1} \geqslant C_* r^n.$$

Ceci achève la preuve de la Proposition 1.3.

3. Preuve du Théorème 1.2

Pour montrer le Théorème 1.2, on établit d'abord les lemmes préliminaires suivants :

LEMME 3.1. – *On a uniformément pour tout* $(s,m),(s_*,m_*)\in C(N)$:

$$d^2\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\sim\big(|s-s_*|+\min(s,s_*)d_N(m,m_*)\big)^2$$
$$\sim (s-s_*)^2+ss_*d_N^2(m,m_*).$$

Preuve. – Par le Lemme 3.1.1 de [17] (p. 152), on sait qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $(s,m),(s_*,m_*)\in C(N)$, on a :

$$C\big[|s-s_*|+\min(s,s_*)d_N(m,m_*)\big]$$
$$\leqslant d\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\leqslant 2\big[|s-s_*|+\min(s,s_*)d_N(m,m_*)\big].$$

Or, pour $\rho_0>0$ fixé, il existe une constante $C(\rho_0)>1$ telle que pour tout $0\leqslant y<+\infty$ et tout $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$, on a :

$$C(\rho_0)^{-1}\big[(y-1)^2+y\rho^2\big]\leqslant\big[|y-1|+\min(y,1)\rho\big]^2$$
$$\leqslant C(\rho_0)\big[(y-1)^2+y\rho^2\big].$$

On a donc

$$\big[|s-s_*|+\min(s,s_*)d_N(m,m_*)\big]^2\sim(s-s_*)^2+ss_*d_N^2(m,m_*),$$

uniformément pour tous $(s,m),(s_*,m_*)\in C(N)$.

D'où le lemme. □

LEMME 3.2. – *Si* $\delta\geqslant 1/2$; *alors pour* $C_2>0$ *fixé, il existe une constante* $C_1>0$ *telle que* :

$$\frac{\sqrt{t}}{s}\left(\frac{t}{ss_*}\right)^{-(\delta+1/2)}\leqslant C_1\mathrm{e}^{C_2\frac{(s-s_*)^2}{t}},\quad\forall\frac{t}{ss_*}\geqslant 1,\ \textit{où}\ s,s_*,t>0.$$

De plus, si $\delta<1/2$, *il n'existe pas de constantes* $C_1,C_2>0$ *telles que l'estimation précédente soit vraie.*

Preuve. – En effet, si $\delta\geqslant 1/2$ et $C_2>0$, pour tout $\frac{t}{ss_*}\geqslant 1$, on a

$$\frac{\sqrt{t}}{s}\left(1\Big/\left(\frac{t}{ss_*}\right)\right)^{\frac12+\delta}\leqslant\frac{\sqrt{t}}{s}\left(1\Big/\left(\frac{t}{ss_*}\right)\right)=\frac{s_*}{\sqrt{t}}\leqslant 2\left(1+\frac{2}{C_2}\right)\mathrm{e}^{C_2\frac{(s-s_*)^2}{t}}.$$

De plus, si $\delta < 1/2$, on pose $s = t^{\frac{1}{2}+\frac{2}{1-2\delta}}$ et $s_* = t^{\frac{1}{2}+1}$. Alors, quand $0 < t \leqslant 1$, on a $\frac{t}{ss_*} \geqslant 1$ et

$$C_1 e^{C_2 \frac{(s-s_*)^2}{t}} \leqslant C_1 e^{2C_2},$$
$$\frac{\sqrt{t}}{s}\left(1\Big/\left(\frac{t}{ss_*}\right)\right)^{\frac{1}{2}+\delta} = t^{-\frac{2}{1-2\delta}(\frac{1}{2}-\delta)+(\frac{1}{2}+\delta)} = t^{\delta-\frac{1}{2}} \to +\infty,$$

quand $t \to 0^+$.

Ceci achève la preuve du lemme. $\square$

LEMME 3.3. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord et de dimension $n-1 \geqslant 2$. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $0 < C_2 < 1/4$, qui dépendent des propriétés de N, telles que pour tout $0 < t \leqslant 1$ et tout $(m, m_*) \in N \times N$, on a :*

$$\left[t\left|\frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2}\right| + t^{1/2}\left|\nabla_{N^{(m)}}\frac{\partial}{\partial t}p_t\right| + t^{-1/2}|\nabla_{N^{(m)}} p_t| \right.$$
$$\left. + \left|\nabla^2_{N^{(m)}} p_t\right|\right]\big((1,m),(1,m_*)\big) \leqslant C_1 t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-C_2\frac{d_N^2(m,m_*)}{t}}.$$

Preuve. – On va développer des idées de [25] pour montrer ce lemme. Puisque p_t est C^∞, pour montrer ce lemme, il suffit de prouver que l'inégalité précédente est vraie quand $m \neq m_*$. Dans la suite, on suppose que $m \neq m_*$, on fixe une fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, $\operatorname{Supp}\phi \subseteq [-\delta_0, \delta_0]$ et $\phi(s) = 1$ pour $|s| \leqslant \delta_0/4$ avec $0 < \delta_0 \ll \min(1, \rho)$ (ρ est le rayon d'injectivité de N). Alors, d'après les résultats de [25] (pp. 432–433), on a :

$$p_t\big((1,m),(1,m_*)\big)$$
$$= \frac{1}{2\pi t}\left\{(-1)^n \sum_j \frac{\phi_j(m)\phi_j(m_*)}{\nu_j^{2n}} \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2n} \left[\big(1-\phi(s)\big)e^{-\frac{(1-\cos s)}{2t}}\right]\right.$$
$$\times \cos \nu_j s\, ds - \sum_j \frac{\sin \nu_j \pi}{\nu_j^{2n}} \phi_j(m)\phi_j(m_*) \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2n} e^{-\frac{(1+\cosh s)}{2t}}\right]$$
$$\left.\times e^{-\nu_j s}\, ds\right\} + \frac{1}{2\pi t}\int_0^\pi \phi(s) e^{-\frac{(1-\cos s)}{2t}} \cos \nu s(m, m_*)\, ds.$$

De plus, d'après les résultats de [3] (pp. 255–258), [4] (p. 5) ou [14] (§17.4.), on a :

$$\cos h\nu(m, m_*) = \sum_{k=0}^{K} U_k(m, m_*) h \frac{(h^2 - d_N^2(m, m_*))_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{(n-1)+1}{2}} + hC_K(h, m, m_*),$$

pour tout $0 < h \leqslant \delta_0$ et tout $m \neq m_* \in N$, où $U_k(m, m_*) \in C^\infty(N \times N)$ et $\frac{(h^2-d_N^2(x,x_*))_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}|_{l=\frac{n}{2}}$ a le sens de §3.4. de [11]; $C_K(h, x, x_*) \in C^2([0, \delta_0] \times N \times N)$ (si on choisit K assez grand) et $C_K(h, x, x_*) = 0$ quand $d_N(x, x_*) > h$.

Mais,

$$\int_0^\pi \phi(s) \mathrm{e}^{-\frac{(1-\cos s)}{2t}} s \frac{(s^2 - d_N^2(m, m_*))_+^{k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(k - \frac{n}{2} + 1)} ds$$
$$= \int_0^\pi \left\{ \left(-\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\right)^j \left[\phi(s)\mathrm{e}^{-\frac{(1-\cos s)}{2t}}\right] \right\} s \frac{(s^2 - d_N^2(m, m_*))_+^{j+k-\frac{n}{2}}}{\Gamma(j+k+1-\frac{n}{2})} ds, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

Alors, d'après le Lemme 2.1 et les informations précédentes, on peut montrer ce lemme. □

Maintenant, on peut donner la preuve du Théorème 1.2 comme suit :

On rappelle que pour toute $f \in C^\infty(C(N))$ et tout $(s, m) \in C(N)$, on a

$$\left|\nabla f(s,m)\right|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial s} f(s,m)\right|^2 + \left|\frac{1}{s}\nabla_N f(s,m)\right|^2.$$

Dans la suite, on montre que si et seulement si $\lambda_1 \geqslant n-1$, il existe deux constantes $C_1 > 0$, $0 < C_2 < 1/4$ telles que pour tout $t > 0$ et tous $(s, m), (s_*, m_*) \in C(N)$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial s} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\right| \leqslant C_1 t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-C_2 \frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}}.$$

En effet, par

$$p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big) = t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \cdot \left[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\right]\big|_{h=\frac{t}{ss_*}},$$

on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\\
&\quad = -\frac{s-s_*}{2t} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\\
&\qquad - t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{1}{s}\left\{h\frac{d}{dh}\left[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\right]\right\}_{h=\frac{t}{ss_*}}.
\end{aligned}
$$

D'une part, d'après le Théorème 1.1 et le Lemme 3.1, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{s-s_*}{2t} p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\right|\\
&\quad = \left|\frac{s-s_*}{2t}\right| t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \cdot \left[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\right]\big|_{h=\frac{t}{ss_*}}\\
&\quad \leqslant 2t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{16t}} \left[C_1 \mathrm{e}^{-C_2\frac{d^2((1,m),(1,m_*))}{h}}\right]_{h=\frac{t}{ss_*}}\\
&\quad \leqslant C_* t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-C^*\frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Dans la suite, on va estimer

$$
\left| t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{1}{s}\left\{h\frac{d}{dh}\left[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\right]\right\}_{h=\frac{t}{ss_*}}\right|.
$$

De deux choses l'une :

1. Si $h = \frac{t}{ss_*} < 1$. D'après le Théorème 1.1 et le Lemme 3.1, on a :

$$
\begin{aligned}
&\left| t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{1}{s}\left\{h\frac{d}{dh}\left[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\right]\right\}_{h=\frac{t}{ss_*}}\right|\\
&\quad \leqslant t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{\sqrt{t}}{s}\left\{C_*\,\mathrm{e}^{-C^* d^2((1,m),(1,m_*))/(\frac{t}{ss_*})}\right\}\\
&\quad \leqslant C\, t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-C_*\frac{d^2((s,m),(s_*,m_*))}{t}},
\end{aligned}
$$

puisque pour tout $C_1 > 0$, il existe une constant $C_2 > 0$ telle que :

$$
\frac{\sqrt{t}}{s} \leqslant \left(\frac{s_*}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C_2}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{C_1\frac{s_*}{s}} \leqslant C_2 \mathrm{e}^{C_1\frac{(s-s_*)^2}{ss_*}} \leqslant C_2\,\mathrm{e}^{C_1\frac{(s-s_*)^2}{t}}, \quad \forall \frac{t}{ss_*} \leqslant 1.
$$

2. Si $h = \frac{t}{ss_*} \geqslant 1$, par (2.4), on a

$$
\begin{aligned}
&h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\\
&\quad = h^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{2} \sum_j \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}} I_{\nu_j}\left(\frac{1}{2h}\right) \phi_j(m)\phi_j(m_*)\\
&\quad = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_j \frac{h^{\frac{n-2}{2}-\nu_j}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu_j)} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{h}} \big[a(1-a)\big]^{\nu_j-\frac{1}{2}} \, da \, \phi_j(m)\phi_j(m_*),
\end{aligned}
$$

en remarquant que par [24] (p. 84), pour $\tau > -1/2$ et $\omega > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\tau\right)\mathrm{e}^{-\omega} I_\tau(\omega) &= \mathrm{e}^{-\omega}\left(\frac{\omega}{2}\right)^\tau \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-\omega h}\big(1-h^2\big)^{\tau-\frac{1}{2}}\, dh\\
&= \left(\frac{\omega}{2}\right)^\tau \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-\omega(1+h)}\big(1-h^2\big)^{\tau-\frac{1}{2}}\, dh\\
&= \left(\frac{\omega}{2}\right)^\tau \int_0^2 \mathrm{e}^{-\omega h}\big[h(2-h)\big]^{\tau-\frac{1}{2}}\, dh\\
&= (2\omega)^\tau \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\omega h}\big[h(1-h)\big]^{\tau-\frac{1}{2}}\, dh.
\end{aligned}
$$

D'après (2.1) et (2.2), quand $h = \frac{t}{ss_*} \geqslant 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
&t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{1}{s} \left\{ h \frac{d}{dh}\big[h^{\frac{n}{2}} p_h\big((1,m),(1,m_*)\big)\big]\right\}_{h=\frac{t}{ss_*}}\\
&\quad = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{\sqrt{t}}{s} \left\{ h\left[\frac{d}{dh}\left(\frac{h^{\frac{n-2}{2}-\nu_1}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu_1)} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{h}}\right.\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left. \times \big[a(1-a)\big]^{\nu_1-\frac{1}{2}}\, da\right)\right] \varphi(m,m_*) + \mathrm{O}\big(h^{\frac{n-2}{2}-\nu_2^*}\big)\right\}\\
&\quad = C(\nu_1)\, t^{-\frac{n+1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-s_*)^2}{4t}} \frac{\sqrt{t}}{s} h^{\frac{n-2}{2}-\nu_1} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{h}} \big[a(1-a)\big]^{\nu_1-\frac{1}{2}}\, da\\
&\qquad \times \left\{\varphi(m,m_*) + \mathrm{O}\big(h^{\nu_1-\nu_2^*}\big) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{h}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, d'après (3.1) et les Lemmes 3.2 et 3.1, on peut montrer le résultat cherché.

De la même façon, on peut montrer les autres résultats du Théorème 1.2.

4. Des applications des Théorèmes 1.1 et 1.2

Le but de cette section est de donner quelques applications des Théorèmes 1.1 et 1.2.

Dans un premier temps, nous étudions les multiplicateurs dans le cadre des variétés coniques à base compacte ; nous établissons des résultats analogues à ceux de [1]. Pour d'autres résultats concernant les multiplicateurs, on peut se réferer par exemple à [5,9,10,12,15,19–23,26, 28], etc.

Si $\int_0^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda$ désigne la représentation spectrale de $-\triangle$. Soit φ une fonction mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème spectral, on peut définir l'opérateur $\varphi(-\triangle) = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$. On veut considérer les multiplicateurs :

$$m_{\alpha,\beta}(\lambda) = \psi\big(|\lambda|\big)|\lambda|^{-\beta/2}\mathrm{e}^{i|\lambda|^{\alpha/2}}, \qquad m(\lambda) = \big(1+|\lambda|\big)^{-\beta/2}\mathrm{e}^{it|\lambda|},$$
$$\alpha, \beta > 0,$$

où ψ est une fonction C^∞, 0 pour $|\lambda| \leqslant 1$ et 1 pour $|\lambda| \geqslant 2$; on considère aussi les opérateurs

$$I_{k,\alpha}(-\triangle) = kt^{-k} \int_0^t (t-s)^{k-1}\, \mathrm{e}^{is(-\triangle)^{\alpha/2}}\, ds, \quad k, \alpha > 0.$$

On sait que $\frac{\sin t\sqrt{-\triangle}}{\sqrt{-\triangle}}$ a la propriété de propagation à vitesse 1, voir [7] (p. 315) ; en remarquant que $\cos t\sqrt{-\triangle} = \frac{d}{dt}(\frac{\sin t\sqrt{-\triangle}}{\sqrt{-\triangle}})$, on déduit que $\cos t\sqrt{-\triangle}$ $(t \neq 0)$ a la propriété de propagation à vitesse finie, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\operatorname{Supp} K_t(x,y) \subseteq \{(x,y); d(x,y) \leqslant C \cdot t\}$ où $K_t(x,y)$ désigne le noyau de $\cos t\sqrt{-\triangle}$. D'après le Théorème 1.1 et la Proposition 1.3, en utilisant les démarches de [1] ou [2], on peut obtenir les résultats suivants :

COROLLAIRE 4.1. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe et de dimension $n-1 \geqslant 2$. On a les résultats suivants* :

(1) *$m_{\alpha,\beta}(-\triangle)$ est borné dans $L^p(C(N))$ pour tout $\beta > \alpha n|1/p-1/2|$* $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.
(2) *Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\alpha > n/2$; alors, $I_{k,\alpha}(-\triangle)$ est borné dans $L^p(C(N))$ pour tout $k > n\,|1/p-1/2|$* $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.
(3) *Si $p \geqslant 1$ et $|1/p-1/2| < \beta/2n$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que* :

$$\left\|m(-\triangle)f\right\|_p \leqslant C_\varepsilon\bigl(1+|t|\bigr)^{n|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|+\varepsilon}\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p\bigl(C(N)\bigr).$$

Ensuite, nous pouvons utiliser les Théorèmes 1.1 et 1.2 ainsi que la Proposition 1.3 afin d'obtenir des résultats partiels concernant la transformation de Riesz sur les variétés coniques à base compacte, consulter [16] et [17] pour les résultats complets :

COROLLAIRE 4.2. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension $n-1 \geqslant 2$. Alors, la transformation de Riesz, $\nabla(-\triangle)^{-1/2}$ est de type faible* $(1,1)$ *et borné dans $L^p(C(N))$ pour tout* $1 < p \leqslant 2$.

COROLLAIRE 4.3. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension $n-1 \geqslant 2$ et sans bord. Alors, quand $\lambda_1 < n-1$, $\nabla(-\triangle)^{-1/2}$ n'est pas borné dans $L^p(C(N))$ lorsque $p > n/(\frac{n}{2}-\sqrt{(\frac{n-2}{2})^2+\lambda_1})$. De plus, quand $\lambda_1 \geqslant 2n$, $\nabla(-\triangle)^{-1/2}$ est de type fort (p,p) pour tout $2 < p < +\infty$.*

En effet, par le Théorème 1.1 et la Proposition 1.3, en répétant les démarches de [8], on peut établir le Corollaire 4.2.

Pour montrer le Corollaire 4.3, d'abord, on rappelle que $\nabla(-\triangle)^{-1/2}$ est borné dans $L^2(C(N))$ et que $|\nabla f(s,m)|^2 = |\frac{\partial}{\partial s}f(s,m)|^2 + |\frac{1}{s}\nabla_N f(s,m)|^2$ pour tout $(s,m) \in C(N)$ et toute $f \in C^\infty(C(N))$, puisque le noyau de l'opérateur $(-\triangle)^{-1/2}$ est égal à $\pi^{-1/2}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}p_t((s,m),(s_*,m_*))\,dt$; d'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, la Proposition 1.3 ainsi que la théorie des intégrales singulières, on déduit que $\nabla(-\triangle)^{-1/2}$ est de type faible $(1,1)$ et borné dans $L^p(C(N))$ pour tout $1 < p < +\infty$ quand N est une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension $n-1 \geqslant 2$, sans bord et $\lambda_1 \geqslant 2n$. On va maintenant montrer la première partie du Corollaire 4.3 :

Soit $\{U_j,\psi_j\}_{1\leqslant j\leqslant N_0}$ un système quelconque de coordonnées locales sur N et soit $\{h_j\}_{1\leqslant j\leqslant N_0}$ une partition quelconque d'unité subordonnée à

$\{U_j, \psi_j\}_{1\leqslant j\leqslant N_0}$, c'est-à-dire,

$$0\leqslant h_j\leqslant 1, \quad \sum_j h_j\equiv 1 \quad \text{et} \quad h_j\in C_0^\infty(U_j).$$

Alors, d'après la compacité de N, il existe une constante $C>0$ telle que : pour tout $1\leqslant j\leqslant N_0$ et toute $f_N\in C_0^\infty(N)$, on a

$$C^{-1}h_j(m)\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f_N}{\partial m_i}\right|(m)\leqslant h_j(m)\left|\nabla_N f_N(m)\right|\leqslant Ch_j(m)\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\partial f_N}{\partial m_i}\right|(m),$$
$$\forall m\in N.$$

Maintenant, pour $1\leqslant i\leqslant n-1$ et $1\leqslant j\leqslant N_0$ fixés, on définit un opérateur T_{ij} comme suit :

$$\begin{aligned}T_{ij}f(s,m)&=\frac{1}{s}h_j(m)\frac{\partial}{\partial m_i}\int\limits_{C(N)}\left(\pi^{-1/2}\int\limits_0^{+\infty}t^{-1/2}p_t\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\,dt\right)\\&\quad\times f(s_*,m_*)\,d\mu(s_*,m_*)\\&=\int\limits_{C(N)}K_{ij}\big((s,m),(s_*,m_*)\big)f(s_*,m_*)\,d\mu(s_*,m_*),\end{aligned}$$

pour toute $f\in C_0^\infty(C(N))$, avec

$$\begin{aligned}&K_{ij}\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\\&\quad=\pi^{-1/2}\frac{1}{s}h_j(m)\int\limits_0^{+\infty}t^{-1/2}\left(\frac{\partial p_t}{\partial m_i}\right)\big((s,m),(s_*,m_*)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s}\nabla_N(-\triangle)^{-1/2}f\right|(s,m)&=\sum_{j=1}^{N_0}h_j(m)\left|\frac{1}{s}\nabla_N(-\triangle)^{-1/2}f\right|(s,m)\\&\sim\sum_{i,j}|T_{ij}f|(s,m).\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $1<p<+\infty$ fixé, l'opérateur $\frac{1}{s}\nabla_N(-\triangle)^{-1/2}$ est de type fort (p,p) si et seulement si les opérateurs T_{ij} sont de type fort (p,p) pour tout $1\leqslant i\leqslant n-1$ et tout $1\leqslant j\leqslant N_0$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit une fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(h) = 0$ quand $h < \varepsilon$ et $\eta(h) = 1$ quand $h > \varepsilon + 2$; d'après le quatrième résultat du Théorème 1.2, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que :

$$\sum_{i,j} \left|K_{i,j}\big((s_*, m_*), (s, m)\big)\right| \eta(s)$$
$$\geqslant C(\varepsilon)\big(d\big((s, m), (s_*, m_*)\big)\big)^{-(\frac{n}{2}+\sqrt{(\frac{n-2}{2})^2+\lambda_1})}, \quad \forall s \gg 1,$$

uniformément pour tout $(s_*, m_*, m) \in [\varepsilon + 3, \varepsilon + 4] \times U_* \times V_*$ où U_* et V_* sont deux ensembles ouverts de N. L'estimation précédente nous permet de déduire la première partie du Corollaire 4.3.

Dans toute la suite, on va utiliser les Théorèmes 1.1 et 1.2 pour étudier la transformation de Riesz sur les variétés coniques $C(C(N)) = \mathbb{R}^+ \times C(N)$ où N est compacte sans bord et de dimension $n - 1 \geqslant 2$:

THÉORÈME 4.4. – *Si N est une variété riemannienne compacte connexe, sans bord, de dimension $n - 1 \geqslant 2$. ∇_* (resp. $\triangle_*$) désigne le gradient (resp. laplacien) sur la variété conique $\mathbb{R}^+ \times C(N)$. Alors,*

(1) *pour $\varepsilon > 0$, $p > n + 1$ et $C > 0$ fixés, il existe une fonction $f \in L^p(C(C(N)))$ avec* Supp $f \in \mathbb{R}^+ \times ([\varepsilon, +\infty) \times N)$ *telle que* :

$$\left\|\nabla_*(-\triangle_*)^{-1/2} f\right\|_p \geqslant C\, \|f\|_p;$$

(2) *quand $\lambda_1 \geqslant n - 1$, $\nabla_*(-\triangle_*)^{-1/2}$ est borné dans $L^p(C(C(N)))$ pour tout $1 < p \leqslant 2$; de plus, $\frac{1}{r}\nabla_{C(N)}(-\triangle_*)^{-1/2}$ est de type faible $(1,1)$ et $\frac{\partial}{\partial r}(-\triangle_*)^{-1/2}$ est de type fort (p, p) pour tout $2 < p < n + 1$;*

(3) *quand $\lambda_1 \geqslant n - 1$, pour $\varepsilon > 0$ et $2 < p < n + 1$ fixés, il existe une constante $C(\varepsilon, p) > 0$ telle que* :

$$\left\|\nabla_*(-\triangle_*)^{-1/2} f\right\|_p \leqslant C(\varepsilon, p)\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p\big(C\big(C(N)\big)\big)$$
$$\textit{avec } \operatorname{Supp} f \in \mathbb{R}^+ \times \big([\varepsilon, +\infty) \times N\big);$$

(4) *quand $\lambda_1 \geqslant 2n$, $\nabla_*(-\triangle_*)^{-1/2}$ est de plus borné dans $L^p(C(C(N)))$ pour tout $2 < p < n + 1$.*

Pour montrer le théorème précédent, on a besoin des trois lemmes préliminaires suivants :

LEMME 4.5. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe de dimensin $n - 1 \geqslant 1$. Soit $\rho > 0$ fixé. Alors, il existe une constante $C(\rho) > 0$ telle que, pour tout $x \in C(N)$, on a* :

$$\mu\big(B(y,2s)\cap B(x,\rho)\big)\leqslant C(\rho)\mu\big(B(y,s)\cap B(x,\rho)\big),$$
$$\forall y\in B(x,\rho),\ \forall s\geqslant 0.$$

Preuve. – On remarque que quand $s\geqslant 2\rho$ ou $s=0$, l'inégalité précédente est triviale. Par la suite, on peut supposer que $0<s<2\rho$. On montre d'abord qu'il existe $x_*\in B(x,\rho)$ telle que :

$$B\left(x_*,\frac{s}{16}\right)\subset B(y,s)\cap B(x,\rho). \tag{4.1}$$

De deux choses l'une :

1. Soit $d(x,y)<\rho/3$, on a évidemment $B(y,s/16)\subset B(y,s)\cap B(x,\rho)$.

2. Soit $d(x,y)\geqslant\rho/3$; car $y\in B(x,\rho)$, il existe un chemin $\gamma(t):[0,1]\to C(N)$ tel que $\gamma_{(0)}=x,\ \gamma_{(1)}=\varphi$ et la longueur de γ, $|\gamma|=\rho$.

On pose $0\leqslant t_0\leqslant 1$ tel que le chemin restreint de γ, $\gamma_*=\gamma|_{[t_0,1]}$, a la longueur $|\gamma_*|=s/4$. On note $x_*=\gamma(t_0)$. Alors, $B(x_*,s/16)\subset B(y,s)\cap B(x,\rho)$.

En effet, d'après la définition de x_*, on a d'abord :

$$d(x_*,y)\leqslant|\gamma_*|=\frac{s}{4},\qquad d(x,x_*)\leqslant|\gamma|-|\gamma_*|=\rho-\frac{s}{4}.$$

Donc, pour tout $z\in B(x_*,s/16)$, on a :

$$d(x,z)\leqslant d(x,x_*)+d(x_*,z)<\left(\rho-\frac{s}{4}\right)+\frac{s}{16}<\rho$$

et

$$d(y,z)\leqslant d(y,x_*)+d(x_*,z)<\frac{s}{4}+\frac{s}{16}<s.$$

Par conséquent, d'après (4.1) et la Proposition 1.3, on a

$$\mu\big(B(y,s)\cap B(x,\rho)\big)\geqslant\mu\left(B\left(x_*,\frac{s}{16}\right)\right)\geqslant C\left(\frac{s}{16}\right)^n\geqslant C_*\mu\big(B(y,2s)\big)$$
$$\geqslant C_*\mu\big(B(y,2s)\cap B(x,\rho)\big).$$

On a donc montré ce lemme. □

LEMME 4.6. – *Si N est une variété riemannienne compacte, connexe de dimensin $n-1\geqslant 1$. Alors, il existe une constante $C\geqslant 1$ telle que pour tout $s>0$ et tout $y\in C(N)$, on a* :

$$\mu_{C(C(N))}\big((B_*(X,2s)\big) \leqslant C\mu_{C(C(N))}\big(B_*(X,s)\big), \quad \forall X \in \mathbb{R}^+ \times B\left(y, \frac{1}{2}\right),$$

où la boule (*induite*) *de* $\mathbb{R}^+ \times B(y,1/2)$, $B_*(X,s) = B_{C(C(N))}(X,s) \cap (\mathbb{R}^+ \times B(y,1/2))$.

De plus, pour tous (r,x), $(r_1,x_1) \in C(C(N))$ *avec* $d(x,x_1) < 1$, *on a* :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\big[|r-r_1| + \min(r,r_1)d(x,x_1)\big] &\leqslant d_{C(C(N))}\big((r,x),(r_1,x_1)\big)\\ &\leqslant 2\big[|r-r_1| + \min(r,r_1)d(x,x_1)\big].\end{aligned}$$

Preuve. – La preuve de ce lemme est comme celle des Proposition 3.1 et 3.2 de [18]. □

LEMME 4.7. – *Si* N *est une variété riemannienne compacte, connexe de dimensin* $n-1 \geqslant 1$. *Soient* $\rho > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *fixés. Soit* $\{B(x_j,\rho)\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *une famille maximale de boule de rayon* ρ, *deux à deux disjointes. Alors, il existe un entier* $\tau > 0$ *tel que chaque boule* $B(x_{j_0}, 2^k\rho)$ *rencontre au plus* τ *autre boules* $B(x_j, 2^k\rho)$.

Preuve. – D'après la Proposition 1.3, on obtient immédiatement ce lemme. □

Or

$$\begin{aligned}\big|\nabla_* f\big(r,(s,m)\big)\big|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial r} f\big(r,(s,m)\big)\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s} f\big(r,(s,m)\big)\right|^2\\ + \left|\frac{1}{r}\,\frac{1}{s}\nabla_N f\big(r,(s,m)\big)\right|^2\end{aligned}$$

pour toute $f \in C^\infty(C(C(N))$ et tout $(r,(s,m)) \in C(C(N))$, d'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, la Proposition 1.3, le Corollaire 1.5 ainsi que les trois lemmes précédents, en utilisant les démarches de [17] et [18], on peut obtenir le Théorème 4.4. Par exemple, on peut deduire le premier résultat du Théorème 4.4 en considérant l'adjoint de l'opérateur $\frac{1}{r}[\frac{1}{s}\nabla_N(-\triangle_*)^{-1/2}]$ et en utilisant le quatrième résultat du Théorème 1.2.

Je tiens à remercier le Directeur de Recherche, Monsieur Noël Lohoué, pour ce sujet et son soutien constant.

RÉFÉRENCES

[1] Alexopoulos G., Oscillating multipliers on Lie groups and Riemannian manifolds, Tôhoku Math. J. 46 (1994) 457–468.

[2] Alexopoulos G., Lohoué N., Riesz means on Lie groups and Riemannian manifolds of nonnegative curvature, Bull. Soc. math. France 122 (1994) 209–223.

[3] Bérard P., On the wave equation on Riemannian manifold without conjugate points, Math. Z. 155 (1977) 249–276.

[4] Bérard P., Riesz means on Riemannian manifolds, in: Proceedings of Symposis in Pure Mathematics, No. 36, 1980, pp. 1–12.

[5] Brenner P., The Cauchy problem for system in L_p and $L_{p,\alpha}$, Ark. Mat. 2 (1973) 75–101.

[6] Cheeger J., Spectral geometry of singular Riemannian spaces, J. Differential Geom. 18 (1983) 575–657.

[7] Cheeger J., Taylor M.E., On the diffraction of wave by conical singularities. I, Comm. Pure Appl. Math. XXV (1982) 275–331.

[8] Coulhon T., Duong X.T., Riesz transforms for $1 \leqslant p \leqslant 2$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999) 1151–1169.

[9] Fefferman C., Inequalities for strongly singular convolution operators, Acta Math. 124 (1970) 9–36.

[10] Fefferman C., Stein E.M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972) 139–163.

[11] Gelfand I.M., Shilov G., Generalized Function I, Academic Press, New York, London, 1960.

[12] Giulini S., Meda S., Oscillating multipliers on noncompact symmetric spaces, J. Reine Angew. Math. 409 (1990) 93–105.

[13] Grigor'yan A., Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitray manifolds, J. Differential Geom. 45 (1997) 33–52.

[14] Hörmander L., The Analysis of Linear Partial Differential Operator III: Pseudo-Differential Operators, Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.

[15] Ishii H., On some Fourier multipliers and partial differential equation, Math. Japon. 19 (1974) 139–163.

[16] Li H.-Q., La transformation de Riesz sur les variétés coniques, C. R. Acad. Sci. Paris 326 (1998) 1167–1170.

[17] Li H.-Q., La transformation de Riesz sur les variétés coniques, J. Funct. Anal. 168 (1999) 145–238.

[18] Li H.-Q., Lohoué N., La transformation de Riesz sur certaines variétés coniques (à paraître).

[19] Lohoué N., Estimations des sommes de Riesz d'opérateurs de Schrödinger sur les variétés riemanniennes et les groupes de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I 315 (1992) 13–18.

[20] Mauceri G., Meda S., Vector-valued multipliers on stratified groups, Revista Mat. Iberoamericana 6 (1990) 141–154.

[21] Miyachi A., Some singular transformations bounded in the Hardy space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 25 (1978) 93–108.

[22] Miyachi A., On some estimates for the wave equation in H^p and L^p, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 27 (1980) 331–354.
[23] Miyachi A., On some singular Fourier multipliers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 27 (1980) 267–315.
[24] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P., Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1966.
[25] Nagase M., The fundamental solution of the heat equation on Riemannian spaces with cone-like singular points, Kodai Math. 7 (1984) 382–455.
[26] Sjöstrand S., On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat. Ser. III 24 (1970) 331–348.
[27] Sogge C.D., Fourier Integrals in Classical Analysis, Cambridge University Press, 1993.
[28] Stein E.M., Singular integrals, harmonic functions and differentiability properties of functions of several variables, Pro. Sympos. Pure Math. 10 (1967) 316–335.
[29] Yau S.-T., Nonlinear Analysis in Geometry, Monographie No. 33 de l'Enseignement Mathématique, Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, No. 8.